

证明题 (共3小题, 其中1, 2各8分, 3题9分共25分)

1. (8分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 证明在 $[0, a]$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = f(\xi + a).$$

2. (8分)

证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

3. (9分)

极限思想是高等数学中的重要思想之一, 是导数与微分理论的产生与发展的基石。请尝试利用极限思想与导数的定义推导函数

$$f(x) = x^2 + \sin x$$

的导函数 $f'(x)$, 并求在点 $(0, 0)$ 处的切线方程和法线方程。